

Математическая модель движения беспилотного летательного аппарата в бикватернионной форме

Ахрамович С.А., Малышев В.В., Старков А.В.

A mathematical model of the motion of an unmanned aerial vehicle in a dual quaternions

Akhramovich S.A., Malyshev V.V., Starkov A.V.

Введение

Для решения задач управления летательными аппаратами в первую очередь определяют его математическую модель. Математическая модель должна описывать движение центра масс ЛА в пространстве и движение вокруг центра масс. Как правило, движение и положение ЛА описывается с помощью динамических и кинематических дифференциальных уравнений, в которых установлены связи между положениями и скоростями ЛА и связи между силами и их моментами, действующих на ЛА, а также с количеством движения [2, 5, 7]. При данном подходе, чтобы описать полную математическую модель движения ЛА требуется 12 нелинейных дифференциальных уравнений. В статье предлагается использовать математический аппарат бикватернионов для описания движения БПЛА.

Применение кватернионов уже широко используется в области робототехники, компьютерной графики, а также в аэрокосмической технике, например, в задачах управлении ЛА вокруг центра масс [1, 9].

Основное предназначение бикватернионов – это математическая формулировка и решение задач механики твердого тела в трехмерном пространстве. Бикватернионы помогают определять и складывать перемещения тела, выполнять преобразование координат, описывать скорость движения тела, приводить к стандартному виду систему сил, действующих на тело [3].

В данной статье рассматривается применение бикватернионов не только для описания механики движения БПЛА, но и динамики.

Кватернионы

Кватернионы предоставляют альтернативный путь определения положения летательного аппарата. Несмотря на возражения, что угловое движение летательного аппарата значительно труднее визуализировать, задавая его кватернионами, а не углами Эйлера, кватернионное представление имеет математические преимущества, что делает его предпочтительным при выборе для моделирования динамики многих летательных аппаратов. Важнее всего то, что представление с помощью углов Эйлера вырождается, когда угол тангажа оказывается равным $\pm 90^\circ$. Физически это означает что, когда угол тангажа составляет 90° , углы крена и рыскания оказываются неразличимы. Математически это означает, что кинематическое состояние, задаваемое уравнением (1), оказывается неопределенным, поскольку $\cos \vartheta = 0$, при $\vartheta = \pm 90^\circ$.

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\cos \vartheta} (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma). \quad (1)$$

Представление положения в кватернионной форме избавлено от такого недостатка. В то время, как данное неопределённость углов не является проблемой для подавляющего большинства условий полета, она является проблемой моделирования при выполнении фигур высшего пилотажа и других экстремальных маневров, причем некоторые из которых могут быть непреднамеренными. Другое преимущество состоит в том, что кватернионная формулировка оказывается в вычислительном плане более эффективной. Формулировка кинематики воздушного аппарата углами Эйлера включает в себя нелинейные тригонометрические функции, тогда как кватернионная формулировка приводит к значительно более простым линейным и алгебраическим уравнениям [7].

Основные понятия кватернионов

Кватернион – это упорядоченная четверка действительных чисел, которая содержит в себе информацию о скаляре и трехмерном векторе [1, 3, 9]:

$$\mathbf{q} = [q_0, q_1, q_2, q_3] = q_0 + q_1i + q_2j + q_3k, \quad (2)$$

где i, j, k – мнимые единицы: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$.

Кватернион в компонентах будем изображать в виде строки или столбца (в зависимости от удобства написания) в квадратных скобках.

Принято обозначать q_0 как скалярную часть кватерниона, и $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]$ – как векторную часть. Кватернион может быть интерпретирован как

одиначный поворот вокруг оси в трехмерном пространстве. Для поворота на угол φ вокруг оси, заданной единичным вектором $\mathbf{e} = [e_x, e_y, e_z]^T$, кватернион определяется как:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ e_x \sin \frac{\varphi}{2} \\ e_y \sin \frac{\varphi}{2} \\ e_z \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Для кватерниона определено несколько скалярных характеристик.

1. Норма кватерниона:

$$|\mathbf{q}| = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2. \quad (4)$$

2. Модуль кватерниона:

$$|\mathbf{q}| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим основные операции над кватернионами.

1. Кватернионное сопряжение (conjugating), определяется следующим образом:

$$\mathbf{q}^* = [q_0, -\mathbf{q}] = [q_0, -q_1, -q_2, -q_3]. \quad (6)$$

2. Кватернионное сложение и вычитание:

$$\mathbf{q} \pm \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 \pm p_0 \\ q_1 \pm p_1 \\ q_2 \pm p_2 \\ q_3 \pm p_3 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Как видно из формулы, кватернионы складываются и вычитаются покомпонентно. В результате кватернионного сложения или вычитания получается кватернион. Операция сложения и вычитания кватернионов коммутативно.

3. Умножение числа на кватернион или кватерниона на число, определяется формулой:

$$a\mathbf{q} = \mathbf{q}a = \begin{bmatrix} aq_0 \\ aq_1 \\ aq_2 \\ aq_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

В результате умножения числа на кватернион или кватерниона на число получается кватернион. Операция коммутативна.

4. Кватернионное умножение, обозначаемое знаком "⊗", определяется формулой:

$$\mathbf{q} \otimes \mathbf{p} = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - \mathbf{q}^T \mathbf{p} \\ q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

В результате кватернионного умножения получается кватернион. Кватернионное умножение некоммутативно.

Данная операция является одной из основных при работе с кватернионами, так как несет в себе физический смысл, а именно, результатом кватернионного умножения является сложение двух поворотов, определяемых кватернионами \mathbf{q} и \mathbf{p} [1].

5. Кватернионное векторное умножение:

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

В результате этой операции получается чисто векторный кватернион, скалярная часть которого равна нулю.

6. Обратный кватернион:

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{\mathbf{q}}. \quad (11)$$

Как говорилось выше, ориентацию БПЛА в виде кватернионов трудно визуализировать в отличие от углов Эйлера. При моделировании динамики и кинематики в кватернионах начальные условия ориентации БПЛА удобнее задать в углах Эйлера, затем эти углы преобразовать в кватернион и промоделировать полет БПЛА используя кватернионы. Отслеживать текущую ориентацию БПЛА также удобно с помощью углов Эйлера, это можно сделать, применив обратное преобразование кватерниона ориентации БПЛА в углы Эйлера.

Зная углы Эйлера для последовательности поворотов $\psi \rightarrow \vartheta \rightarrow \gamma$ можно вычислить кватернион:

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \\ \cos \frac{\psi}{2} \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} - \sin \frac{\psi}{2} \cos \frac{\vartheta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

и наоборот, преобразование кватерниона в углы Эйлера определяется следующими формулами:

$$\begin{aligned}\psi &= \arctan \frac{2(q_0 q_2 - q_1 q_3)}{q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2}; \\ \vartheta &= \arcsin \left(2(q_1 q_2 + q_0 q_3) \right); \\ \gamma &= \arctan \frac{2(q_0 q_1 - q_2 q_3)}{q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2}.\end{aligned}\tag{13}$$

Преобразование вектора из одной СК в другую кватернионом

Пусть $OX_g Y_g Z_g$ – неподвижная нормальная система координат (НСК), а $OXYZ$ – жестко связанная СК (ССК) с БПЛА. Тогда, ориентацию БПЛА относительно НСК можно задать кватернионом \mathbf{q} [1].

Пусть задан вектор $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$ в ССК, тогда можно получить вектор $\mathbf{r}_{\text{НСК}}$ в НСК с помощью выражения [1, 3, 9]:

$$\mathbf{r}_{\text{НСК}} = \mathbf{q} \otimes \mathbf{r} \otimes \mathbf{q}^{-1},\tag{14}$$

и обратно

$$\mathbf{r} = \mathbf{q}^{-1} \otimes \mathbf{r}_{\text{НСК}} \otimes \mathbf{q},\tag{15}$$

где \mathbf{r} – вектор в ССК в кватернионной форме, $\mathbf{r} = (0, r_x, r_y, r_z)^T$. В случае, если $|\mathbf{q}| = 1$, то можно использовать вместо обратного кватерниона \mathbf{q}^{-1} сопряженный кватернион \mathbf{q}^* .

Дуальные числа

Важную роль при переходе от проблемы ориентации тела к проблеме его положения в трехмерном пространстве играют специальные числа, называемые дуальными.

Дуальным числом или параболическим комплексным числом называется комплексное число вида [3, 9]:

$$A = a_1 + \epsilon a_2,\tag{16}$$

где a_1 и a_2 – действительные числа;

ϵ – особая единица, обладающая свойством $\epsilon^2 = 0$.

Дуальное число равно нулю, только если обе его части равны нулю.

Операции над дуальными числами:

1. Сложение и вычитание дуальных чисел определяется следующим образом:

$$A \pm B = (a_1 \pm b_1) + \epsilon (a_2 \pm b_2).\tag{17}$$

Сложение и вычитание дуальных чисел коммутативно и ассоциативно.

2. Произведение дуальных чисел определяется так:

$$A \cdot B = (a_1 \cdot b_1) + \epsilon (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1).\tag{18}$$

Умножение дуальных чисел коммутативно, ассоциативно и дистрибутивно по отношению к сложению.

3. Операция деления обратна операции умножения:

$$\frac{A}{B} = \frac{b_1}{a_1} + \epsilon \frac{(a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1)}{a_1^2}. \quad (19)$$

Частным случаем является обращение дуального числа:

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{a_1} - \epsilon \frac{a_2}{a_1^2}. \quad (20)$$

Бикватернионы

Родоначальником бикватернионов считают Уильяма Клиффорда. Он, разрабатывая геометрию движения, обобщил кватернионы Гамильтона, построив бикватернионы. Идеи У. Клиффорда развил видный российский ученый А. П. Котельников, посвятив бикватернионам часть своей книги по винтовому исчислению [3].

Бикватернион (дуальный кватернион) – гиперкомплексное число, имеющее вид:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1 + \epsilon \mathbf{q}_2, \quad (21)$$

где ϵ – символ (комплексность) Клиффорда, обладающий свойством $\epsilon^2 = 0$;

\mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 – кватернионы, которые определяют действительную (главную) и дуальную (моментную) часть бикватерниона.

На рис. 1 показана геометрическая интерпретация понятия бикватерниона, на нем изображены операции вращения и линейного перемещения базиса.

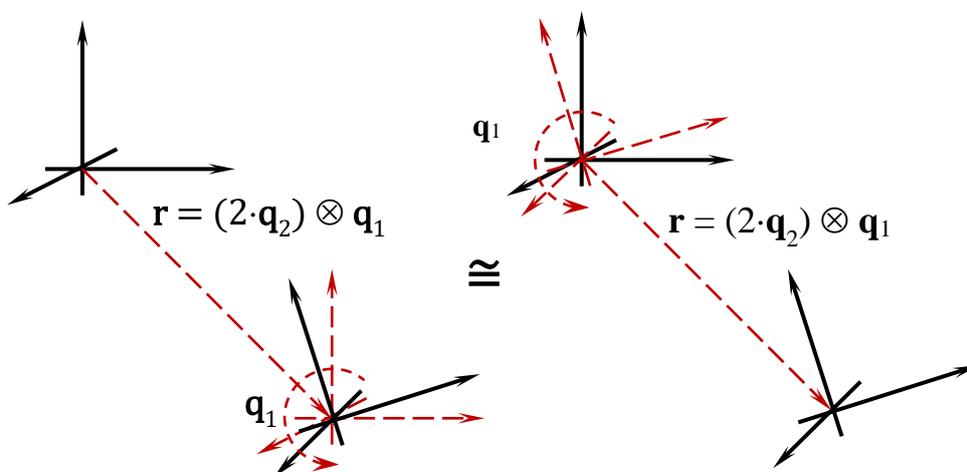


Рис. 1. Геометрическая интерпретация бикватерниона

Основные скалярные характеристики:

1. Норма бикватерниона представляет собой дуальное число:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{q}_1 + \epsilon \cdot (q_{1_0} q_{2_0} + \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2). \quad (22)$$

2. Модуль бикватерниона – дуальное число:

$$|\tilde{\mathbf{q}}| = |\mathbf{q}_1| + \epsilon \frac{q_{1_0} q_{2_0} + \mathbf{q}_1^T \mathbf{q}_2}{|\mathbf{q}_1|}. \quad (23)$$

Основные операции над бикватернионами:

1. Бикватернионное сопряжение:

$$\tilde{\mathbf{q}}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^* \\ \mathbf{q}_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1^* + \epsilon \mathbf{q}_2^*. \quad (24)$$

2. Бикватернионное сложение и вычитание:

$$\tilde{\mathbf{q}} \pm \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \pm \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_2 \pm \mathbf{p}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1 \pm \mathbf{p}_1 + \epsilon (\mathbf{q}_2 \pm \mathbf{p}_2). \quad (25)$$

В результате получается бикватернион. Сложение и вычитание бикватернионов коммутативно.

3. Умножение действительного числа на бикватернион:

$$a\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}a = \begin{bmatrix} a\mathbf{q}_1 \\ a\mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = a\mathbf{q}_1 + \epsilon a\mathbf{q}_2. \quad (26)$$

4. Бикватернионное умножение:

$$\tilde{\mathbf{q}} \otimes \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p}_1 + \epsilon (\mathbf{q}_1 \otimes \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{p}_1). \quad (27)$$

В результате бикватернионного умножения получается бикватернион. Бикватернионное умножение некоммутирует.

Данная операция аналогично кватернионному умножению является одной из основных при работе с бикватернионами, и так же несет в себе физический смысл, а именно, результатом бикватернионного умножения является операцией сложения поворотов и линейных перемещений, определяемых бикватернионами $\tilde{\mathbf{q}}$ и $\tilde{\mathbf{p}}$ [3, 9].

5. Бикватернионное векторное умножение:

$$\tilde{\mathbf{q}} \times \tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{p}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_1 + \epsilon (\mathbf{q}_1 \times \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}_2 \times \mathbf{p}_1). \quad (28)$$

6. Обратный бикватернион:

$$\tilde{\mathbf{q}}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{q}}^*}{\tilde{\mathbf{q}}}. \quad (29)$$

Для первоначального определения бикватерниона необходимо задать действительную и дуальную части бикватерниона. Ориентация и положение БПЛА задается относительно некой базовой СК с помощью углов Эйлера ψ, ϑ, γ и вектора положения центра масс $\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)^T$.

Действительную часть \mathbf{q}_1 можно задать с помощью формулы (12). Дуальная часть \mathbf{q}_2 определяется выражением [3]:

$$\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2} \mathbf{r} \otimes \mathbf{q}_1, \quad (30)$$

где $\mathbf{r} = (0, r_x, r_y, r_z)^T$ – вектор положения центра масс БПЛА в кватернионной форме.

Обратное преобразование делается аналогично, ориентация БПЛА в углах Эйлера получается из формулы (13), а положение центра масс БПЛА определяется выражением:

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{q}_2 \otimes \mathbf{q}_1^{-1}, \quad (31)$$

в результате получается вектор $\mathbf{r} = (0, r_x, r_y, r_z)^T$ в кватернионной форме.

Динамические уравнения движения БПЛА

Динамическое уравнение движения центра масс БПЛА в ССК определяется векторным уравнением изменения количества движения [1]:

$$m \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V} \right) = \mathbf{F}, \quad (32)$$

где $\mathbf{V} = (V_x, V_y, V_z)^T$ – вектор скорости движения ЛА;

$\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ – вектор угловой скорости вращения связанных с БПЛА осей;

$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ – вектор внешних сил, действующих на БПЛА;

m – масса БПЛА.

Векторное уравнение движения БПЛА относительно центра масс может быть получено из закона изменения момента количества движения [1]:

$$\mathbf{I}_3 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}, \quad (33)$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ – вектор угловой скорости вращения БПЛА;

$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)^T$ – вектор моментов сил, действующих на БПЛА;

\mathbf{I}_3 – тензор инерции БПЛА.

$$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Кинематические уравнения движения БПЛА в бикватернионной форме

Кинематические уравнения движения БПЛА поступательного и вращательного движения в бикватернионной форме описываются следующим дифференциальным уравнением [3, 9]:

$$\frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}} \otimes \tilde{\boldsymbol{\omega}}, \quad (34)$$

здесь $\tilde{\mathbf{q}}$ – бикватернион положения и ориентации БПЛА;

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ – линейная и угловая скорость в бикватернионной форме.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}$$

Динамические уравнения движения БПЛА в бикватернионной форме

Лемма 1. *Динамические уравнения вращательного и поступательного движения твердого тела:*

$$\begin{cases} \mathbf{I}_3 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} = \mathbf{M} \\ m \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times (m\mathbf{V}) = \mathbf{F} \end{cases} \quad (35)$$

могут быть представлены в бикватернионной форме:

$$\mathbf{I} \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{I} \tilde{\boldsymbol{\omega}} = \tilde{\mathbf{F}} \quad (36)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ – угловая и линейная скорости в бикватернионной форме;

$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_1$ – действительная часть бикватерниона угловой и линейной скоростей в бикватернионной форме;

$\tilde{\mathbf{F}}$ – моменты и силы в бикватернионной форме;

\mathbf{I} – расширенный тензор инерции.

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_x \\ M_y \\ M_z \\ 0 \\ F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad (39)$$

Доказательство. Запишем уравнение (36) с учетом (37), (38) и (39).

$$\mathbf{I} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \\ 0 \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{I} \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Умножая расширенный тензор инерции \mathbf{I} на бикватернион $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$, и применив бикватернионное векторное умножение (28) учитывая векторное кватернионное умножение (10), получим:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_3 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \\ 0 \\ m \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{V} + 0 \times \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (41)$$

слагаемое $0 \times \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} = 0$, отсюда следует:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{I}_3 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \\ 0 \\ m \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} \\ 0 \\ \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{M} \\ 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

выделяя векторную часть кватерниона из действительной и моментной части бикватерниона каждого слагаемого уравнения (42) получаем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \\ m \frac{d\mathbf{V}}{dt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_3 \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{\omega} \times m\mathbf{V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix}, \quad (43)$$

что соответствует системе уравнений (35). ■

Записывая динамическое и кинематическое дифференциальные уравнения движения (34) и (43) в форме Коши, получаем математическую модель движения БПЛА в бикватернионной форме:

$$\boxed{\begin{cases} \frac{d\tilde{\boldsymbol{\omega}}}{dt} = \mathbf{I}^{-1} (\tilde{\mathbf{F}} - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{I}\tilde{\boldsymbol{\omega}}) \\ \frac{d\tilde{\mathbf{q}}}{dt} = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{q}} \tilde{\boldsymbol{\omega}} \end{cases}} \quad (44)$$

Данная система имеет ряд преимуществ, а именно:

- полностью описывает пространственное поступательное и вращательное движение БПЛА;
- математическая модель динамического и кинематического движения БПЛА состоит из двух уравнений;
- отсутствует вырождение вращательного движения при углах тангажа $\pm 90^\circ$.
- бикватернионная форма записи более эффективна в вычислительном плане.

Матрица расширенного тензора инерции \mathbf{I} , входящая в систему (44) имеет размерность 8×8 , что затрудняет вычисление обратной матрицы из-за высокого порядка, однако она имеет блочную структуру, и при проектировании БПЛА часто центробежные моменты инерции равны или близки нулю, т.е. $I_{xy} = I_{xz} = I_{yx} = I_{yz} = I_{zx} = I_{zy} = 0$. В этом случае матрица \mathbf{I} становится диагональной, и обратная матрица легко вычисляется:

$$\mathbf{I}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{xx}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{yy}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{zz}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \quad (45)$$

Силы и моменты, действующие на БПЛА

На БПЛА в полете действуют следующие силы и моменты:

- сила тяжести \mathbf{F}_G ;
- аэродинамическая сила \mathbf{F}_A и аэродинамический момент \mathbf{M}_A ;
- сила тяги двигателя \mathbf{F}_P и момент тяги двигателя \mathbf{M}_P ;
- крутящий момент воздушного винта \mathbf{M}_S .

Здесь запишем основные выражения для сил и моментов, подробное описание перечисленных сил и моментов можно прочитать [7].

Сила тяжести в НСК определяется выражением:

$$\mathbf{F}_G^{\text{НСК}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Для и использования ее в системе (44) необходимо перевести в связанную систему координат.

Аэродинамическая сила и момент приложены в центре давления крыла и определяется в полускоростной системе координат:

$$\mathbf{F}_A^{\text{псск}} = \begin{bmatrix} -c_x qS \\ c_y qS \\ c_z qS \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_A = \begin{bmatrix} m_x qS b_a \\ m_y qS b_a \\ m_z qS b_a \end{bmatrix}, \quad (47)$$

где $c_x, c_y, c_z, m_x, m_y, m_z$ – безразмерные аэродинамические коэффициенты, которые определяются экспериментальным путем;

S – характерная площадь крыла;

b_a – средняя аэродинамическая хорда крыла;

$q = \frac{\rho V^2}{2}$ – скоростной напор;

V – скорость набегающего потока;

$\rho = 1,225$ – плотность воздуха при малой высоте полета.

Для определения аэродинамических коэффициентов во многих случаях в первом приближении приемлемы следующие зависимости:

$$\begin{aligned} c_x &= c_x^0 + c_x^\alpha \alpha + c_x^{\alpha^2} \alpha^2, \\ c_y &= c_y^0 + c_y^\alpha \alpha + c_y^\delta \delta_z, \\ c_z &= c_z^0 + c_z^\beta \beta + c_z^\delta \delta_y, \\ m_x &= m_x^0 + m_x^\beta \beta + m_x^\delta \delta_x, \\ m_y &= m_y^0 + m_y^\beta \beta + m_y^\delta \delta_y, \\ m_z &= m_z^0 + m_z^\alpha \alpha + m_z^\delta \delta_z, \end{aligned} \quad (48)$$

где коэффициенты, стоящие в правых частях выражений, считаются постоянными; $\delta_z, \delta_y, \delta_x$ – углы отклонения органов управления тангажом, рысканьем и креном; α, β – углы атаки и скольжения, определяемые по формулам:

$$\alpha = -\arctan \frac{V_y}{V_x}; \quad \beta = \arcsin \frac{V_z}{V}. \quad (49)$$

Двигатель тяги устанавливается на БПЛА так, чтобы направление силы тяги действовало вдоль оси OX в плоскости OXY . Поэтому положение двигателя тяги определяется в ССК вектором $\mathbf{r}_p = (r_{px}, r_{py}, 0)^T$, а сила тяги $\mathbf{F}_p = (F_{px}, 0, 0)^T$. Момент силы тяги определяется выражением:

$$\mathbf{M}_p = \mathbf{r}_p \times \mathbf{F}_p = \begin{pmatrix} r_{px} \\ r_{py} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_{px} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r_{py} F_{px} \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Действие, оказываемое крутящим моментом воздушного винта, обычно относительно небольшое и действует вокруг оси вращения воздушного винта. Но для данного типа БПЛА его следует учитывать, так как под его воздействием происходит

кручение крыла, в следствие чего возникает момент вокруг оси OY , и БПЛА, при работающем двигателе тяги движется по спиральной траектории. Такой момент можно выразить следующей формулой:

$$\mathbf{M}_S = \begin{bmatrix} 0 \\ k_P F_{Px} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (51)$$

где k_P – константа, значение которой определяется экспериментально.

Если его не учитывать, то крутящий момент вызовет медленное поперечное движение в направлении, противоположном вращению винта. Это перемещение легко устраняется с помощью небольшого отклонения элевона, которое создает момент крена для противодействия крутящему моменту воздушного винта.

Численное моделирование

Для подтверждения полученной математической модели в бикватернионной форме было проведено численное моделирование движения БПЛА в среде MATLAB.

Начальные условия полета БПЛА задаются в виде углов Эйлера и начального вектора положения, затем переводятся в бикватернион с помощью выражений (12) и (30). Далее проводится численное интегрирование системы (44), на каждом шаге вычисляются параметры ориентации и вектора положения используя формулы (13) и (31).

Управление БПЛА осуществляется по высоте и углу тангажа двигателем тяги, и по курсу – клевантами (управляющие стропы), которые отклоняют заднюю левую и правую кромки крыла (элевоны) на углы $\delta_{лев}$ и $\delta_{прав}$, см. рис. 2 и рис. 3.

$$\begin{aligned} \delta_x &= 0; \\ \delta_y &= \frac{1}{2}(\delta_{лев} - \delta_{прав}); \\ \delta_z &= \frac{1}{2}(\delta_{лев} + \delta_{прав}). \end{aligned} \quad (52)$$

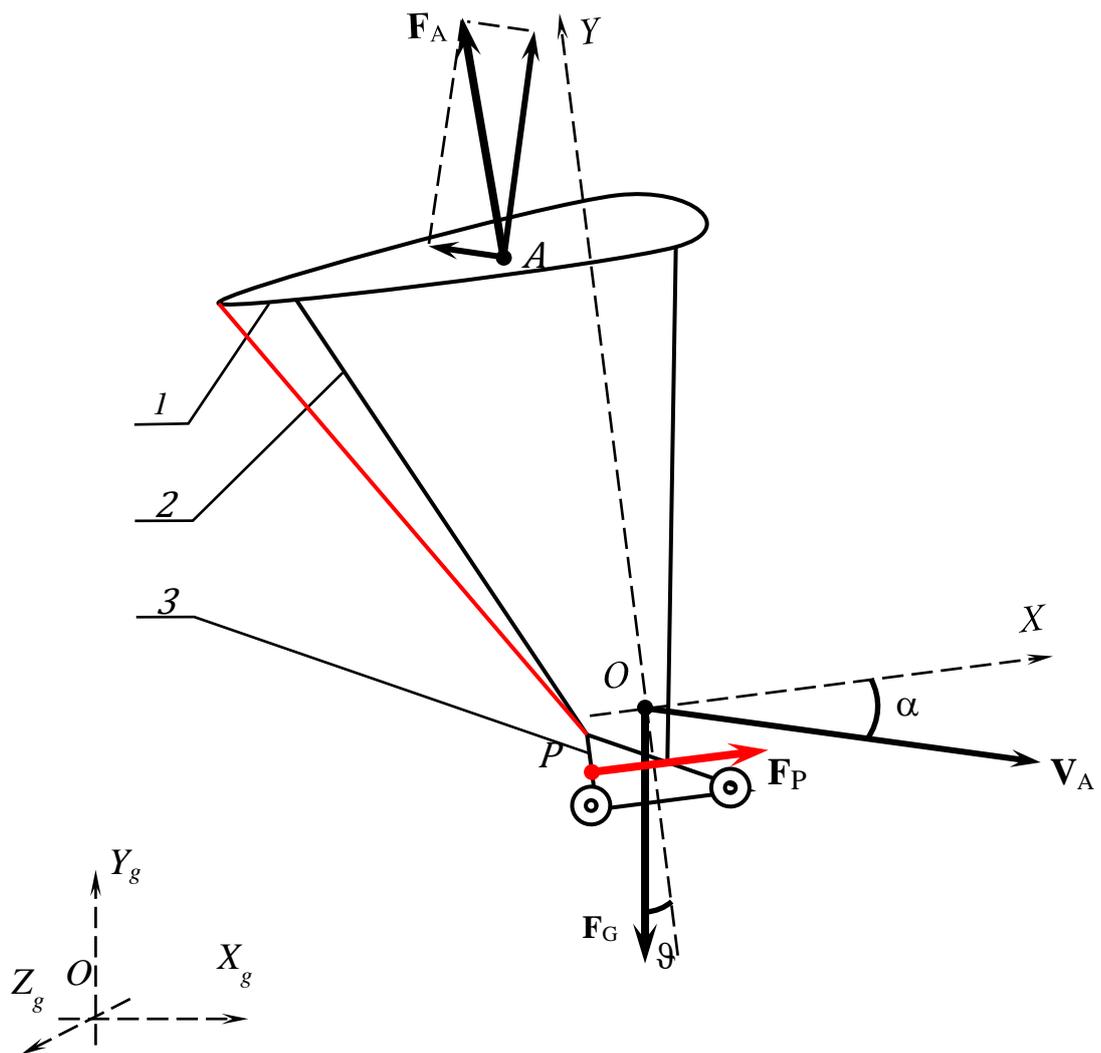


Рис. 2. Схема БПЛА в продольной плоскости:
 1 – крыло, 2 – система строп, 3 – мотогондола

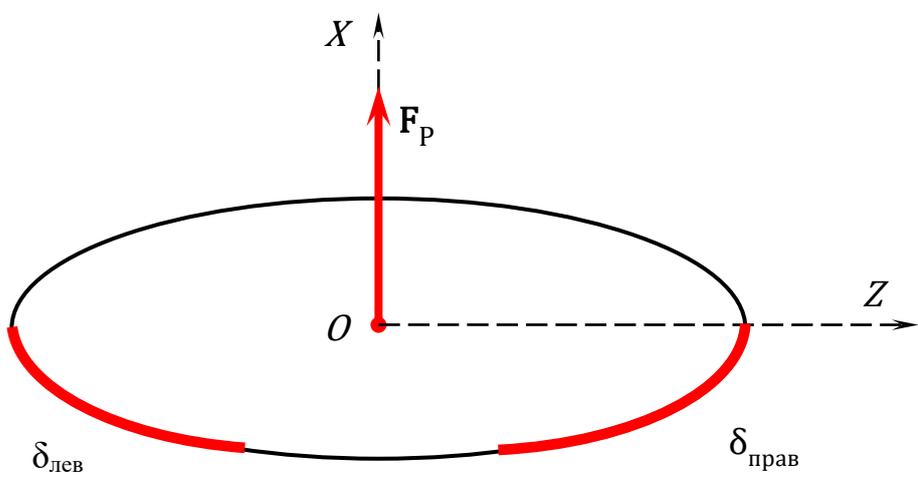


Рис. 3. Схема БПЛА. Вид сверху

Таблица 1. Начальные условия моделирования

Параметр	Значение
Вектор положения	$\mathbf{r} = (0; 100; 0)^T \text{ м}$
Углы ориентации	$\psi = 0; \vartheta = 0; \gamma = 0; \text{град}$
Линейная скорость	$\mathbf{V} = (10; 0; 0)^T \text{ м/с}$
Угловая скорость	$\boldsymbol{\omega} = (0; 0; 0)^T \text{ град/с}$
Бикватернион положения	$\tilde{\mathbf{q}} = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 50 \ 0 \ 0)$
Бикватернион скоростей	$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0 \ 0)$
Масса	$m = 1 \text{ кг}$
Площадь крыла	$S = 2 \text{ м}^2$
Аэродинамические коэффициенты	$c_x^0 = 0,008; c_x^a = 0,05; c_x^{a^2} = 1,1;$ $c_y^0 = 0,12; c_y^a = 2,3; c_y^\delta = 0,0;$ $c_z^0 = 0,0; c_z^\beta = -0,11; c_z^\delta = 0,0;$ $m_x^0 = 0,0; m_x^\beta = 0,0; m_x^\delta = 0,0;$ $m_y^0 = 0,0; m_y^\beta = -0,001; m_y^\delta = 0,0;$ $m_z^0 = -0,035; m_z^a = -0,1; m_z^\delta = 0,0.$
Тензор инерции	$\mathbf{I}_3 = \begin{bmatrix} 3,67 & 0 & 0 \\ 0 & 3,71 & 0 \\ 0 & 0 & 0,11 \end{bmatrix} \text{ кг}\cdot\text{м}^2$
Сила тяги двигателя	<p>Вариант 1: $\mathbf{F}_P = (0; 0; 0)^T \text{ Н}$</p> <p>Вариант 2: $\mathbf{F}_P = (2; 0; 0)^T \text{ Н}$</p> <p>Вариант 3: $\mathbf{F}_P = (2; 0; 0)^T \text{ Н}$</p>

Ниже представлены результаты моделирования в виде графиков зависимостей параметров от времени. Моделируется 3 варианта: свободной планирование, полет с постоянным включенным двигателем тяги, и третий вариант, с постоянно включенным двигателем тяги и управлением по курсу с помощью клеванты.

Вариант 1. В данном варианте моделируется свободное планирование БПЛА с выключенным двигателем тяги $\mathbf{F}_p = (0; 0; 0)^T H$, без управления по курсу $\delta_{\text{лев}} = 0$ и $\delta_{\text{прав}} = 0$.

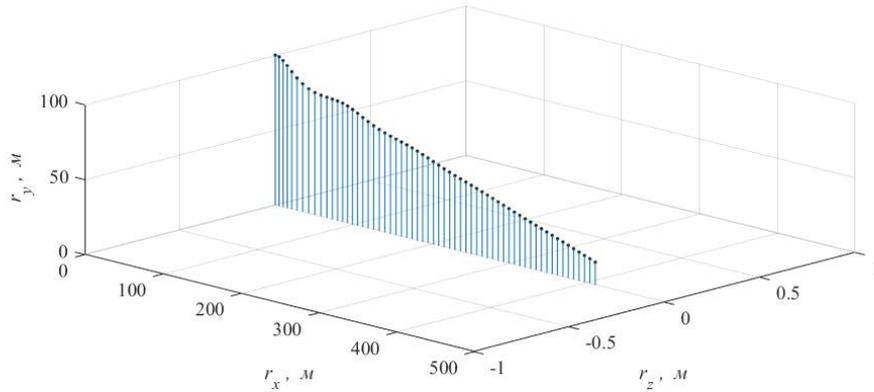


Рис. 4. Пространственная траектория полета БПЛА с проекцией на горизонтальную плоскость

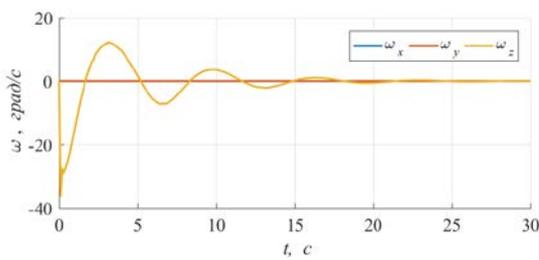


Рис. 5. Графики зависимости вектора угловых скоростей от времени

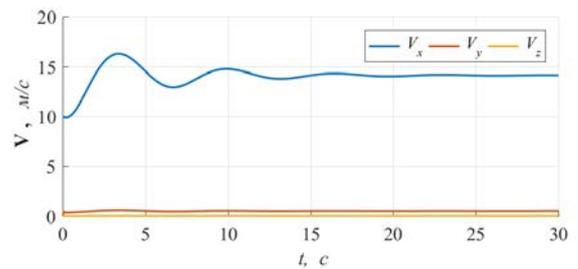


Рис. 6. Графики зависимости вектора линейных скоростей от времени

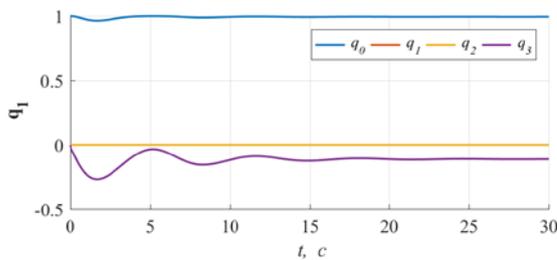


Рис. 7. Графики зависимости кватерниона ориентации от времени

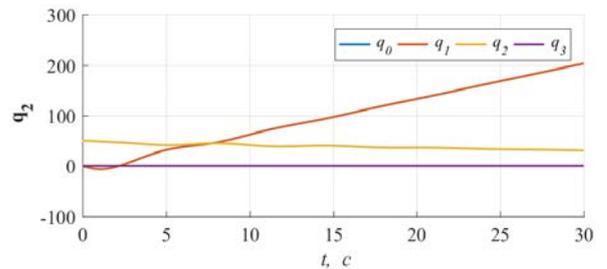


Рис. 8. Графики зависимости кватерниона положения от времени

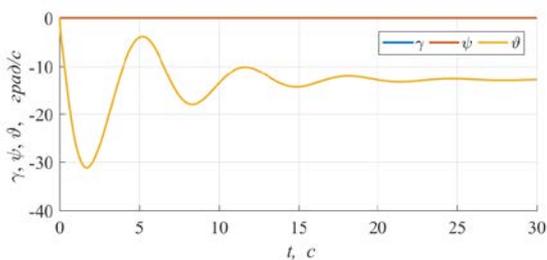


Рис. 9. Графики зависимости углов Эйлера от времени

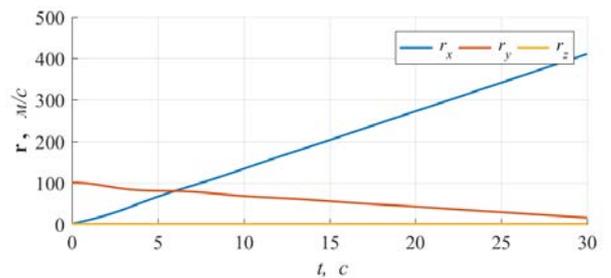


Рис. 10. Графики зависимости вектора положения от времени

Вариант 2. Моделируется полет БПЛА с постоянно включенным двигателем тяги $\mathbf{F}_P = (2; 0; 0)^T H$, без управления по курсу $\delta_{\text{лев}} = 0$ и $\delta_{\text{прав}} = 0$.

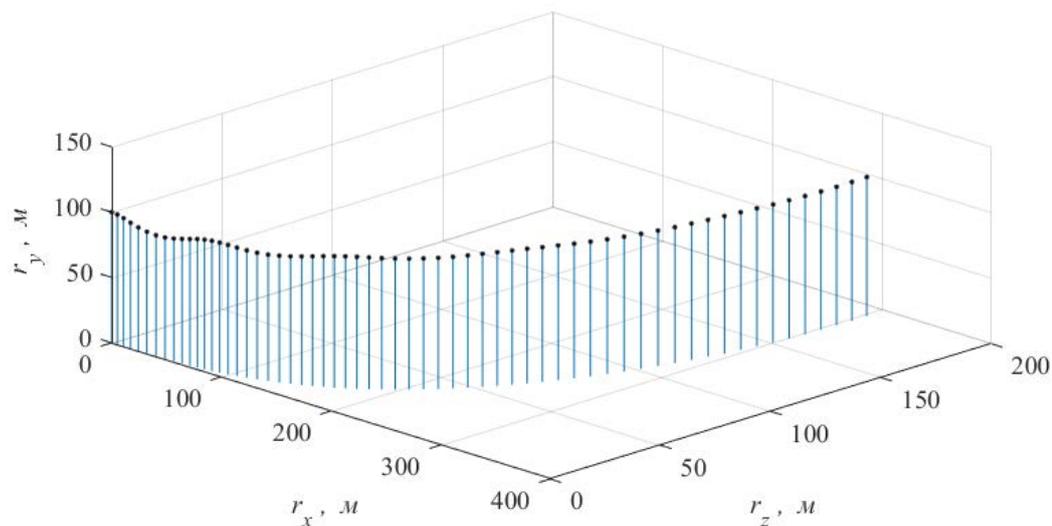


Рис. 11. Пространственная траектория полета БПЛА с проекцией на горизонтальную плоскость

На рисунке видно, что БПЛА набирает высоту и, вследствие возникновения крутящего момента воздушного винта, отклоняется по курсу.

Вариант 3. Моделируется полет БПЛА с постоянно включенным двигателем тяги $\mathbf{F}_P = (2; 0; 0)^T H$, и с управлением по курсу для компенсации крутящего момента винта и поворота вправо $\delta_{\text{лев}} = 0$ и $\delta_{\text{прав}} = 5$ град.

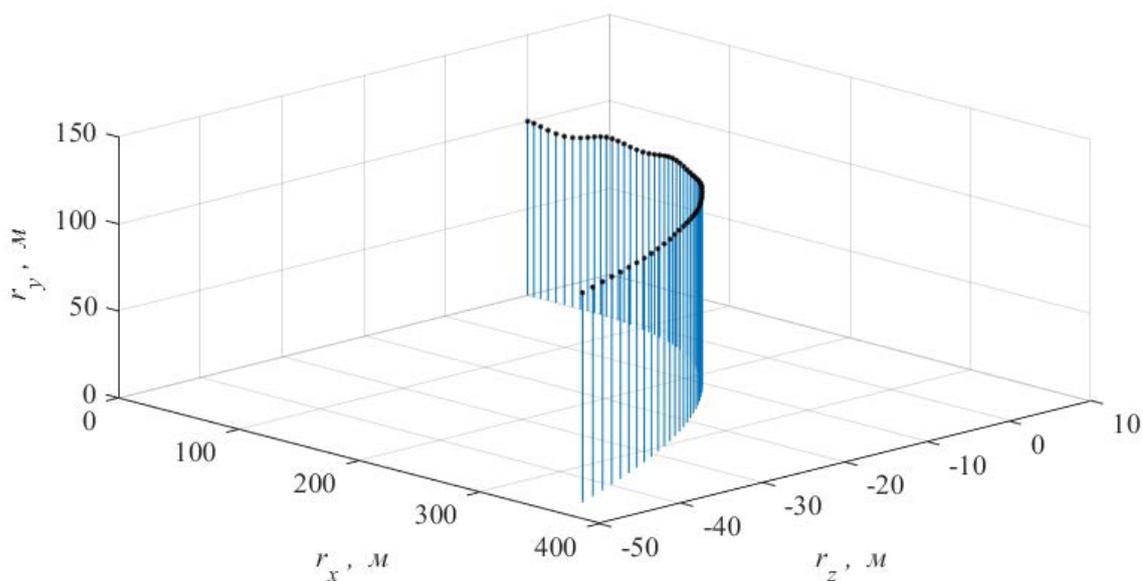


Рис. 12. Пространственная траектория полета БПЛА с проекцией на горизонтальную плоскость

Заключение

В данной статье получен и подтвержден математическим моделированием довольно важный результат – использование бикватернионов для описания полной математической модели движения БПЛА. Полученная математическая модель полностью описывает пространственное поступательное и вращательное движение БПЛА, состоит всего из двух уравнений, одно уравнение описывает динамику движения, а второе – кинематику. Бикватернионная форма записи оказалась более эффективна в вычислительном плане, это дает преимущества перед другими моделями и позволяет использовать данную математическую модель для проведения вычислений на борту БПЛА.

Математическую модель в бикватернионной форме можно использовать в дальнейшем, для синтеза управляющего воздействия, также в бикватернионном виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации в рамках государственного задания (проект № 9.7505.2017/БЧ).

Список литературы

1. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Издательство «Наука», 1973. – 320 с.
2. **Бюшгенс Г. С., Студнев Р. В.** Динамика самолета. Пространственное движение. – М.: Машиностроение, 1983. – 320 с.
3. **Гордеев В. Н.** Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике. – Киев: Издательство «Сталь», 2016. – 316 с. – ISBN 978-617-676-09903.
4. **Грумондз В. Т., Полищук М. А., Карпежников Е. И.** Управлением спуском в атмосфере беспилотного планирующего крылатого летательного аппарата // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». 2017. №9-10. С. 42-48. URL: http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl_9-10_2017_web.pdf
5. **Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С.** Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. Учебное пособие для вузов. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1973. – 616 с.
6. **Петухов С. В., Швед Ю. В., Иванюгин В. М.** Корреляционно-экстремальный алгоритм обработки последовательности изображений при наклонной съемке с низколетящего беспилотного летательного аппарата // Общероссийский научно-технический журнал «Полет». 2017. №3-4. С. 51-57. URL: http://www.ros-polet.ru/files/archiv/pl3-417_web.pdf

7. **Рэндал У. Биард, Тимоти У. МакЛэйн.** Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика. – М.: ТЕХНОСФЕРА, 2015. – 312 с. – ISBN 978-5-94836-393-6.
8. **Усачов В. Е., Таргамдзе Р. Ч.** Принципы и алгоритмы формирования системы математических моделей целевой миссии беспилотного ЛА // Труды МАИ. 2011. №49. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=28282>
9. **Челноков Ю. Н.** Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 512 с. – ISBN 5-9221-0680-5.
10. **Чуркин В.М.** К анализу динамики парашютной системы со свободно подвешенным грузом // Труды МАИ, 2011, №49.

References

1. Branets V. N., Shmyglevskii I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela (The use of quaternions in body orientation problems)*, 1973. 320 p.
2. Byushgens G. S., Studnev R. V. *Dinamika samoleta. Prostranstvennoe dvizhenie (The dynamics of the aircraft. Spatial motion.)*, Mashinostroenie, 1983, 320 p.
3. Gordeev V. N. *Kvaterniony i bikvaterniony s prilozheniyami v geometrii i mekhanike (Quaternions and dual quaternions with applications in geometry and mechanics)*, 2016, 316 p.
4. Lebedev A. A., Chernobrovkin L. S. *Dinamika poleta bespilotnykh letatel'nykh apparatov. Uchebnoe posobie dlya vuzov (Dynamics of flight of unmanned aerial vehicles. Textbook for high schools)*, 1973, 616 p.
5. R. W. Beard, T. W. McLain, *Small Unmanned Aircraft: Theory and Practice*, 2012.
6. Chelnokov Yu. N. *Kvaternionnyye i bikvaternionnyye modeli i metody mekhaniki tverdogo tela i ikh prilozheniya. Geometriya i kinematika dvizheniya (Quaternion and dual quaternion models and methods of solid body mechanics and their applications. Geometry and kinematics of motion)*, 2006, 512 p.
7. Churkin V.M. *K analizu dinamiki parashyutnoi sistemy so svobodno podveshennym грузом (The Analysis of Dynamics Nonrigid Parachute and Payload System)*, Trudy MAI, 2011, №49.